UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

CENTRO TECNOLÓGICO

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

LUAN HENRIQUE SIRTOLI

SOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE AUTOVALOR ESPECIAL GERADO PELA FORMULAÇÃO DO DIBEM AUTO‐REGULARIZADO

VITÓRIA-ES

2020

LUAN HENRIQUE SIRTOLI

SOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE AUTOVALOR ESPECIAL GERADO PELA FORMULAÇÃO DO DIBEM AUTO‐REGULARIZADO

**Dissertação apresentada à Universidade Federal do Espírito Santo, como parte das exigências do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.**

**Orientador: Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto**

VITÓRIA-ES

2020

FICHA CATALOGRÁFICA

|  |
| --- |
| Sirtoli, Luan Henrique  Solução de um problema de autovalor especial gerado pela formulação do DIBEM auto regularizado  Luan Henrique Sirtoli. – 2020.  Páginas xxx f. :il.  Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro tecnológico, Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Vitória, 2014.  Orientação: Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto  1.MEC 2.MECID 3.MECDR 4.MEF 5.Poisson 6.Helmholtz |

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

CENTRO TECNOLÓGICO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

SOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE AUTOVALOR ESPECIAL GERADO PELA FORMULAÇÃO DO DIBEM AUTO‐REGULARIZADO

Luan Henrique Sirtoli

COMISSÃO EXAMINADORA

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

**Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto – Orientador**

Universidade Federal do Espírito Santo – UFES

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

**Prof. Dr. – Examinador externo**

Universidade Federal do Espírito Santo – UFES

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

**Prof. Dr. – Examinador interno**

Universidade Federal do Espírito Santo – UFES

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

**Prof. Dr. – Examinador interno**

Universidade Federal do Espírito Santo – UFES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo como parte dos requisitos necessários a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica

Vitória (ES), 31 de Maio de 2020.

(Página em Branco)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a nosso senhor Jesus Cristo, que permitiu e forneceu a força necessária para enfrentar os obstáculos enfrentados durante minha caminhada, e manteve todos aqueles que estão próximos a mim saudáveis, apesar da pandemia.

Agradeço também ao professor Dr. Carlos Friedrich Loeffler, que sem os seus ensinamentos, sem seu absurdo conhecimento da mecânica, e sem puxões de orelha em seu escritório, este trabalho não teria sido possível. Agradeço seu apoio sempre presente e seus direcionamentos, que não só aumentaram a qualidade deste trabalho, mas também a minha melhor formação como engenheiro.

Também agradeço à minha família, em especial aos meus pais, Sandramar Franzin Soares e Mario Sergio Ribeiro Soares, que sempre deram de tudo para me educar e me apoiaram sempre em minhas escolhas; À minhas irmãs Nathalia, Marina, e à minha namorada Emanuely, que sempre estiveram ao meu lado nos momentos difíceis e me deram forças para sempre continuar.

Agradeço à Universidade Federal do Espírito Santo, em particular aos professores e funcionários do programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica que sempre estiveram presentes e deram apoio quando foi necessário.

(Página em Branco)

RESUMO

O presente trabalho objetiva solucionar um problema de autovalor obtido após o desenvolvimento da equação de Helmholtz no MECID (Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta).

Neste problema, ao ser feita a integração, a aplicação do Teorema da Divergência e a resolução da mesma via MECID, obtém-se um caso especial deste problema de Autovalor. (Buscar explicar melhor na ordem correta: integração > Divergência > MECID).

Ao desenvolver este problema considerando os pontos forte e os pontos base, chega-se a uma equação matricial que possui uma resolução pouco ortodoxa. Assim, este tipo de problema requer uma abordagem diferente, onde será necessária uma manipulação matemática e se utilizar da proposição de Przeminiecky para reduzir a equação matricial à uma forma que seja de boa resolução computacional.

**PALAVRAS–CHAVE:** Método dos Elementos de Contorno, Funções Radiais, Problemas de Campo escalar.

ABSTRACT

Aquele que ama ou exerce ou deseja a dor, pode ocasionalmente adquirir algum prazer na labuta. Para dar um exemplo trivial, qual de nós se submete a laborioso exercício físico, exceto para obter alguma vantagem com isso. Desmoralizado pelos encantos do prazer, percebe que a dor não resulta em prazer algum. Está tão cego pelo desejo que não pode prever quem não cumprirá seu dever por fraqueza de vontade.

Aquele que ama ou exerce ou deseja a dor, pode ocasionalmente adquirir algum prazer na labuta. Para dar um exemplo trivial, qual de nós se submete a laborioso exercício físico, exceto para obter alguma vantagem com isso. Desmoralizado pelos encantos do prazer, percebe que a dor não resulta em prazer algum. Está tão cego pelo desejo que não pode prever quem não cumprirá seu dever por fraqueza de vontade.

Aquele que ama ou exerce ou deseja a dor, pode ocasionalmente adquirir algum prazer na labuta. Para dar um exemplo trivial, qual de nós se submete a laborioso exercício físico, exceto para obter alguma vantagem com isso. Desmoralizado pelos encantos do prazer, percebe que a dor não resulta em prazer algum. Está tão cego pelo desejo que não pode prever quem não cumprirá seu dever por fraqueza de vontade.

Aquele que ama ou exerce ou deseja a dor, pode ocasionalmente adquirir algum prazer na labuta. Para dar um exemplo trivial, qual de nós se submete a laborioso exercício físico, exceto para obter alguma vantagem com isso. Desmoralizado pelos encantos do prazer, percebe que a dor não resulta em prazer algum. Está tão cego pelo desejo que não pode prever quem não cumprirá seu dever por fraqueza de vontade.

Aquele que ama ou exerce ou deseja a dor, pode ocasionalmente adquirir algum prazer na labuta. Para dar um exemplo trivial, qual de nós se submete a laborioso exercício físico, exceto para obter alguma vantagem com isso. Desmoralizado pelos encantos do prazer, percebe que a dor não resulta em prazer algum. Está tão cego pelo desejo que não pode prever quem não cumprirá seu dever por fraqueza de vontade.

**KEYWORDS:** Boundary Element Method, Radial Functions, Scalar Field Problems.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

[Figura 1 – Texto descritivo da Figura 1 1](#_Toc42963715)

[Figura 2 – Figura demonstrando domínio do elemento analisado. 6](#_Toc42963716)

[Figura 3 - Barra engastada em uma extremidade e livre nas outras extremidades. 42](#_Toc42963717)

[Figura 4 - Membrana retangular totalmente fixada. Fonte: Autoria própria. 45](#_Toc42963718)

LISTA DE TABELAS

[Tabela 1 - Resultados da Interpolação da Função Radial Simples 43](#_Toc42963719)

[Tabela 2 - Resultados da Interpolação da Função Log de Engaste 44](#_Toc42963720)

[Tabela 3 - Resultados da Interpolação da Função Radial Simples 46](#_Toc42963721)

LISTA DE ABREVIATURAS

**FORTRAN** – IBM Mathematical Formula Translation System

**MEC** – Método dos Elementos de Contorno

**MECDR** – Método de Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade

**MECID** – Método de Elementos de Contorno com integração Direta

**UFES** – Universidade Federal do Espírito Santo

LISTA DE SIMBOLOS

Sumário

[1. INTRODUÇÃO 1](#_Toc42970555)

[1.1. COMENTÁRIOS PRELIMINARES 1](#_Toc42970556)

[1.2. OBJETIVO 1](#_Toc42970557)

[1.3. METODOLOGIA 1](#_Toc42970558)

[1.4. RESUMO BIBLIOGRÁFICO 2](#_Toc42970559)

[2. CONSIDERAÇÕES INICIAIS 3](#_Toc42970560)

[2.1. O PROBLEMA DE AUTOVALOR 3](#_Toc42970561)

[2.2. PROBLEMAS DE CAMPO ESCALAR 3](#_Toc42970562)

[2.2.1. APLICAÇÕES 3](#_Toc42970563)

[2.2.2. A EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ 4](#_Toc42970564)

[3. O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO 6](#_Toc42970565)

[3.1. INTRODUÇÃO 6](#_Toc42970566)

[3.2. EQUACIONAMENTO DO MÉTODO 6](#_Toc42970567)

[4. O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO COM INTERPOLAÇÃO DIRETA 12](#_Toc42970568)

[4.1. INTRODUÇÃO 12](#_Toc42970569)

[4.2. A FORMULAÇÃO MECID REGULARIZADA APLICADA À PROBLEMAS DE HELMHOLTZ 12](#_Toc42970570)

[4.3. A FORMULAÇÃO MECID AUTORREGULARIZADA APLICADA À PROBLEMAS DE HELMHOLTZ 20](#_Toc42970571)

[5. FORMULAÇÃO PROPOSTA 28](#_Toc42970572)

[5.1. INTRODUÇÃO 28](#_Toc42970573)

[5.2. EQUACIONAMENTO DO MÉTODO 28](#_Toc42970574)

[5.3. PROPOSIÇÃO DE PRZEMINIECKY 37](#_Toc42970575)

[5.4. ANALOGIA DA PROPOSIÇÃO DE PRZEMINIECKY 40](#_Toc42970576)

[6. SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS 44](#_Toc42970577)

[6.1. BARRA ENGASTADA 44](#_Toc42970578)

[6.2. MEMBRANA QUADRADA 47](#_Toc42970579)

[7. CONCLUSÕES 49](#_Toc42970580)

[8. REFERÊNCIAS 50](#_Toc42970581)

[APÊNDICES 53](#_Toc42970582)

# INTRODUÇÃO

## COMENTÁRIOS PRELIMINARES

Para o contínuo desenvolvimento da sociedade humana nos tempos modernos e a manutenção da sustentabilidade da vida no planeta, a evolução das tecnologias se mostra cada vez mais necessária e importante, pois possibilita diversas interações e progressos que não seriam possíveis outrora. A tecnologia se tornou um pilar da sociedade moderna, como exemplificado por: Navegação de aviões através de GPS (Global Positioning System); Possibilitando cálculos estruturais e melhorando a eficiência e segurança de construções; Aumentando a eficiência de equipamentos; entre diversos outros.

Tais aperfeiçoamentos tecnológicos tem por base a busca do conhecimento, de desvendar cada vez mais métodos para soluções de problemas, ou desenvolvimento de modelagens matemáticas extremamente complexas para resolver problemas que outrora seriam impossíveis de serem resolvidos analiticamente.

Tais resoluções matemáticas são bastante usuais dentro da Engenharia, dado o diverso uso que se faz das mesmas, e os diversos métodos desenvolvidos para resolução de problemas e que são aplicados constantemente na Engenharia Mecânica, Civil, Elétrica, entre outras. Alguns desses principais métodos são:

* Método dos Elementos Finitos (MEF)
* Método das Diferenças Finitas (MDF)
* Método dos Volumes Finitos (MVF)
* Método dos Elementos de Contorno (MEC)

Assim, dentro deste contexto, o desenvolvimento deste trabalho busca incrementar o Método dos Elementos de Contorno que surgiu em meados da década de 70, e atingiu um grande uso atualmente, lado a lado com o Método dos Elementos Finitos.

Este método permite lidar com diversos problemas físicos, possui uma boa precisão em comparação aos demais métodos citados e permite uma entrada mais simples de dados para suas modelagens.

## OBJETIVO

Assim, ao avaliar o Método dos Elementos de Contorno nos tempos atuais, duas vertentes se destacam, o Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade e o Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta. Esta última, desenvolvida pelo Professor Doutor Carlos Friedrich Loeffler Neto, pode ser ramificada em dois métodos: Regularizado e Autorregularizado.

Assim, considerando os bons resultados da formulação autorregularizada do Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta em suas aplicações aos problemas ditos diretos governados pela Equação de Helmholtz, objetiva-se elaborar matematicamente um modelo bidimensional matricial autorregularizado adequado para calcular as frequências naturais associadas, que se apresentam neste trabalho, em um problema de autovalor de quarta ordem.

## RESUMO BIBLIOGRÁFICO

Assim, buscando alcançar a conclusão deste objetivo, inicia-se a pesquisa na revisão do Método de Elementos de Contorno apresentado formalmente em 1978 por (Brebbia, The Boundary Element method for Engineers., 1978). Este método foi inicialmente adotado, em sua maioria para a resolução de problemas das áreas de Engenharia Mecânica e Engenharia Civil. Partindo desta data, diversos pesquisadores conseguiram obter diversos resultados prósperos e resolveram diversos problemas importantes da engenharia. Pode-se citar nestes trabalhos:

* Desenvolvimento da Equação de Helmholtz com o MEC por Kagami e Fukai em 1984. (Kagami & Fukai, 1984)
* Solução de problemas de Autovalores aplicando o MEC por Colin em 1991. (Collin, 1991)
* Kagawa, Yonghao e Zaheed estudaram a equação escalar de Helmholtz no MEC a partir da Formulação Variacional. (Kagawa, Yonghao, & Zaheed, 1996)

Outros autores também foram de suma importância para o desenvolvimento do MEC até os dias atuais. Diante do desenvolvimento do MEC, limitações foram encontradas em seu desenvolvimento, assim, o MEC que não conseguiria transformar todas as integrais inicialmente de domínio em integrais envolvendo somente variáveis de contorno, outras propostas variadas do MEC como o Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta surgiram para resolver tal problema. Tal técnica foi desenvolvida em 1982 e consiste na substituição da ação de domínio por uma combinação linear de um produto de novas funções, que são operacionalizadas e tem suas integrais transformadas em integrais de contorno, como feito no MEC tradicional, exemplificado por (Bulcão, 1999).

Assim, partindo de 2012, diversos estudos, liderados pelo Professor Doutor Carlos Friedrich Loeffler Neto, foram desenvolvidos para a melhoria do Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta, que é uma potente variante do MECDR, que é capaz de resolver problemas com uma formulação matemática mais simplificada. Trabalhos notáveis neste método, que contribuíram largamente para o desenvolvimento deste trabalho são:

* Apresentação do MECID formalmente utilizando funções de base radial por (Cruz, 2012);
* Apresentação de resultados favoráveis ao MECID em preferência ao MECDR à aplicação de problemas governados pela Equação de Poisson (Loeffler & Cruz, Avaliação da Precisão e Outras Propriedades Numéricas na Integração ao Longo de Superfícies Geradas por Funções de Base Radial, 2013);
* A comparação da qualidade dos resultados apresentados pelo MECID com outros Métodos como Método dos Elementos Finitos em Problemas de Poisson e Helmholtz (Barcelos, 2014)
* A avaliação e comparação de técnicas da formulação MECID em problemas de autovalor por (Frossard, 2016);
* E por fim, a formulação e desenvolvimento do MECID para a resolução de problemas de Helmholtz utilizando as funções de interpolação de base radial sem regularização (Galimberti, 2018), que é o ponto de partida do desenvolvimento deste trabalho.

# CONSIDERAÇÕES INICIAIS

## PROBLEMAS DE CAMPO ESCALAR

Os problemas de Campo Escalar são problemas físicos associados à Teoria de Campo ou Teoria Potencial, cujo objetivo é integrar problemas presentes na natureza segundo um mesmo enfoque matemático (Loeffler C. F., Uma formulação alternativa do método dos elementos de contorno aplicada a problemas de campo escalar, 1988), (Moon & Spencer, 1971).

Para cada ponto discriminado e avaliado no domínio físico do problema em estudo é associado à um valor potencial ou fluxo de potencial, que podem representar diversas grandezas, entre estas: Pressão, Temperatura, Deslocamento, Densidades de carga elétrica, entre outras grandezas.

Assim, por determinar uma única quantidade da grandeza em cada ponto do espaço avaliado, estes problemas são denominados **Problemas de Campo Escalar**.

### APLICAÇÕES

Conforme previamente definido, dá-se a entender que a Teoria de Campo é capaz de abordar todos os fenômenos físicos da natureza. Com destaque, (Brebbia & Ferrante, The Finite Element Technique, 1975) apresenta uma lista de problemas físicos que estão inseridos na ideia de campo escalar:

* Proteção catódica;
* Condução de calor;
* Escoamento potencial;
* Fluxo através de meios porosos;
* Condução elétrica;
* Difusão de massa.

Os problemas de representação mais simples, típicos de mecânica dos sólidos, também podem estar associados nesta categoria, como os seguintes:

* Torção uniforme de barras prismáticas na zona elástica;
* Deflexão de membranas;
* Escoamento de lubrificantes em mancais de deslizamento;
* Propagação de ondas acústicas

### A EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ

As Equações de Helmholtz estão dentro do grupo das equações de campo escalar e representam problemas nas mais diversas áreas, como: a Física Quântica, a Química e o Eletromagnetismo. Na representação de problemas acústicos, as Equações de Helmholtz representam as vibrações livres de um meio no qual há propagação de energia mecânica (Barcelos, Comparação de desempenho entre a formulação direta do Método dos Elementos de Contorno com Funções Radiais e o Método dos Elementos Finitos em problemas de Poisson e Helmholtz, 2014).

Assim, partindo da Equação Diferencial de Onda Acústica (Gaul, Kögl, & Wagner, 2012) como foi definida abaixo, pode-se fazer a dedução da Equação de Helmholtz.

|  |  |
| --- | --- |
|  | 2. |

No qual, é a resposta espacial do sistema para qualquer excitação com o tempo (Butkov, 1988), e é a velocidade de propagação da onda acústica, definida por:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

onde é o módulo de elasticidade e é a densidade do material onde a onda se propaga. Nesta análise vibracional, busca-se as configurações de equilíbrio que estão associadas as frequências naturais, assim pode-se admitir que o movimento, como a soma de seus harmônicos é representada por:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 2. |

Derivando a equação 2.3 duas vezes em relação ao tempo:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 2. |

Derivando novamente a equação 2.3 duas vezes em relação ao espaço ():

|  |  |
| --- | --- |
|  | 2. |

Aplicando as equações 2.4 e 2.5 na Equação Diferencial de Onda Acústica 2.1, obtemos:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

E simplificando:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 2. |

Assim, é obtida à Equação de Helmholtz que é uma Equação Diferencial Parcial (EDP) que não possui dependência com relação ao tempo.

# O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

## INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é um método numérico, que se baseia em procedimentos de discretização de valores de contorno do domínio, assim, o MEC pode ser classificado dentro do grupo de métodos numéricos que forma a classe das denominadas técnicas de contorno. Esse método abrange procedimentos obedientes à equação diferencial representativa do fenômeno físico, com suas condições prescritas no contorno do domínio analisado.

Figura – Figura demonstrando domínio do elemento analisado.

Assim, o MEC apresenta uma formulação integral, que, utilizando o Teorema da Divergência e manipulações matemáticas, é capaz de representar o problema em função das variáveis de contorno do problema físico. Dessa forma, o MEC transforma a integral de forma forte em integrais de forma inversa no contorno do domínio.

## EQUACIONAMENTO DO MÉTODO

Estes problemas físicos estacionários e simples, que estão inseridos no grupo de Equações de Campo Escalar são representados pela Equação de Laplace, definida por:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Essa equação, por conveniência, pode ser escrita da forma de notação indicial:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 3. |

Para a aplicação do MEC sobre a Equação de Laplace se faz necessário trabalhar a equação 3.2 em sua forma forte, utilizando as funções de ponderação. Assim, a equação 3.2 é expressa na forma:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 3. |

Onde, na equação 3.3, Ω representa o domínio do problema analisado.

A definição da função de ponderação, aqui definida como , corresponde à solução do problema de campo escalar estacionário, governado pela equação de Poisson. Assim, a função , conhecida como solução fundamental, é a solução em um domínio infinito da equação 3.3 que, conforme (Brebbia, The Boundary Element method for Engineers., 1978), se apresenta na equação 3.4 abaixo:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 3. |

Nesta equação, o termo é definido como a função Delta de Dirac (Courant & John, 1974), que representa uma fonte pontual em . Para problemas bidimensionais, (Brebbia, The Boundary Element method for Engineers., 1978) apresenta a expressão abaixo, que representa a função :

|  |  |
| --- | --- |
|  | 3. |

Onde representa a distância euclidiana entre o ponto de aplicação de carga, também chamado de Ponto Forte e um ponto genérico do domínio chamado Ponto Campo.

Ao integrar a equação 3.3 pela primeira vez, encontramos uma forma integral chamada de Forma Fraca, representada pela equação 3.6 abaixo:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 3. |

Após integrar novamente a equação 3.6 através da integração por partes, é obtido a Forma Integral Inversa, dada pela equação 3.7:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 3. |

A obtenção deste modelo é de suma importância para o desenvolvimento do MEC, pois com ele pode-se aplicar o Teorema da Divergência de Gauss (Stewart, 2001) sobre a equação 3.7 para levá-la ao contorno Γ . O resultado deste é apresentado na equação abaixo:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 3. |

Onde o termo representa o vetor normal à superfície no ponto campo. Para simplificar a equação 3.8, os valores abaixo são adotados:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |
|  |  |
|  | 3. |

Assim, a partir da combinação da equação 3.5 e da equação 3.10, podemos definir sua derivada direcional , também chamada de fluxo fundamental (Brebbia, The Boundary Element method for Engineers., 1978):

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Desta forma, podemos reescrever a equação 3.8 da seguinte forma:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 3. |

Onde os termos “” e “” representam respectivamente: o fluxo, e o fluxo fundamental de ponderação , o qual foi apresentado na equação 3.5.

Analisando a equação 3.12, percebe-se que o último termo desta ainda está contido no domínio , ainda representando uma integral de domínio. Assim, utilizando-se da propriedade Delta de Dirac apresentada anteriormente neste capítulo na equação 3.4, reescrevemos o último termo da equação 3.12 como:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

E, portanto, após a integração:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

E assim, obtém-se uma expressão generalizada para a equação 3.12 na forma:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 3. |

A função é uma função de ponto, e de acordo com sua posição no domínio, o valor desta pode variar. Assim, considerando que este ponto pode estar posicionado dentro ou fora do domínio, ou em seu contorno, (Brebbia, The Boundary Element method for Engineers., 1978) propõe os seguintes valores para tal:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |
|  |  |
|  | . |
|  |  |
|  | . |

Deve-se notar, que somente possuirá os valores descritos acima para problemas nos quais o contorno analisado é suave. Ao considerar problemas em que cantos e curvas não suaves estejam envolvidos, deverá ter ser valor calculado de acordo com a expressão abaixo:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  | . |

Onde é o valor do ângulo da curva não suave em radianos.

Percebe-se que também podemos calcular o potencial e o fluxo neste contorno, assim, como as condições de contorno são conhecidas em um domínio de campo escalar, os valores de prescrito e prescrito se tornam constantes, saindo da integral. Portanto, a equação 3.15 torna-se:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Por fim, é necessário discretizar essa equação em forma matricial no contorno, assim, devido aos procedimentos seguintes, para um ponto fonte genérico , obtém-se equação matricial.

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Assim, o procedimento para a avaliação numérica das integrais, bem simples e bem-conhecido, é demonstrado abaixo:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Desta forma, ao agrupar este sistema de equações, obtém-se a equação matricial final:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Onde, e são, respectivamente, os vetores de potencial e fluxo prescritos, contendo os valores que devem ser calculados, e e são, respectivamente, as matrizes provenientes das integrais de função de ponderação para o potencial e fluxo.

# O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO COM INTERPOLAÇÃO DIRETA

## INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta (MECID) é uma variação do MEC, no qual busca resolver o termo integral de Inércia da equação de Helmholtz, assim possibilitando a modelagem do problema de autovalor e o cálculo das frequências naturais associadas.

O MEC apresenta bom desempenho em aplicações em que o operador que caracteriza a equação é auto adjunto. Porém, nem todos os problemas representam-se dessa forma. O uso de funções de base radial tem se mostrado um dos recursos mais eficazes, não apenas com o MEC, mas em outros métodos numéricos, como o MEF.

O MECID, embora parecido com o Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade (MECDR), se mostra mais simples, mais generalizado e robusto que o mesmo. Porém, diferentemente do MECDR, a formulação proposta pelo MECID não requer a construção de duas matrizes auxiliares se utilizando da multiplicação das matrizes de elementos de contorno e , porquê o mesmo aproxima diretamente o núcleo da integral completa, de forma similar a qual é feita em um processo de interpolação utilizando somente uma única função primitiva.

## A FORMULAÇÃO MECID REGULARIZADA APLICADA À PROBLEMAS DE HELMHOLTZ

Para facilitar o entendimento, a equação 2.7 apresentada no capítulo 2 será reintroduzida como a equação 4.1 abaixo:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 4. |

Da mesma forma na qual foi desenvolvido o MEC no capítulo 3, aplica-se a Forma Integral Forte na Equação de Helmholtz 4.1, assim, será obtida a equação 4.2, considerando uma função de ponderação :

|  |  |
| --- | --- |
|  | 4. |

A função representa uma função de ponderação que corresponde à solução do problema de campo escalar estacionário, governado pela equação de Poisson. Essa função, que é a solução fundamental do problema estudado é a solução em um domínio infinito da equação 3.2. Nota-se, que o termo do lado esquerdo da Equação de Laplace é idêntico ao lado esquerdo da equação 3.2, assim, utilizando dessa semelhança, pode-se reescrever a equação 4.2, da mesma forma que foi desenvolvido na equação 3.15:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

A discretização desta equação utilizando dos métodos usuais do MEC seria feita a partir de nós funcionais representativos da distribuição do campo de variáveis e conformação geométrica do corpo. Porém, para a geração de um sistema de equações com possibilidade de resolução a partir da discretização, faz se necessária uma varredura de todos os pontos situados no contorno, adotando mesma quantidade de pontos forte equivalente aos nós funcionais definidos pelo processo de discretização.

Ao adotar este procedimento, o posicionamento dos pontos forte coincidindo com todos os nós funcionais causará uma singularidade no núcleo da integral de domínio demonstrada pelo lado direito da equação 4.23. À fim de evitar essa singularidade, duas nuvens, uma de pontos forte e uma de pontos distintas, eram adotadas. Para evitar esta abordagem problemática, (Loeffler & Mansur, A Regularization Scheme Applied to the Direct Interpolation Boundary Element Technique with Radial Basis Functions for Solving Eigenvalue Problem., 2017), propôs uma abordagem similar à Hadammard, onde as singularidades foram eliminadas, causando a entrada de dados e o processo de implementação do MECID mais rápidos, já que ambos os pontos campo e pontos fonte podem coincidir. Assim:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 4. |

As duas primeiras integrais do lado direito da equação são aproximadas da seguinte forma:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Para dar prosseguimento com a regularização da equação 4.4, deve-se utilizar o núcleo completo da integral de domínio, que será diretamente interpolada utilizando funções de base radial como apresentado na equação 4.6 abaixo:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 4. |

Onde é uma constante que depende o ponto forte e dos pontos interpolantes (). Como a função de interpolação pertence à classe de funções radiais, seu argumento é composto pela Distância Euclidiana , na qual caracteriza as posições dos pontos base relativas aos pontos de domínio genéricos . Esta Distância Euclidiana é definida pela seguinte expressão abaixo:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Estes dois pontos abordados na distância euclidiana são os pontos base e de interpolação.

De forma similar ao DRBEM (Partridge, Brebbia, & Wrobel, 1992), o método proposto também utiliza uma função primitiva de interpolação da função :

|  |  |
| --- | --- |
|  | 4. |

Assim, é aplicado o Teorema da Divergência ao lado direito da equação, transformando a integral de domínio em uma integral de contorno:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Simplificando a equação, define-se:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Portanto:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Assim, a equação de governo do problema de Helmholtz se torna:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Por ora, o segundo termo do lado direito da equação deverá ser mantido em sua forma de integral de domínio, que será abordado novamente, em um momento mais conveniente. Assim, o tratamento matemático e discretização dos termos restantes serão feitos de acordo com (Loeffler, Barcelos, & Mansur, Solving Helmholtz Problems with the Boundary Element Method Using Direct Radial Basis Function Interpolation, 2015).

Assim, para a tal discretização, é seguido o procedimento comum ao MEC. Portanto, para um ponto fonte genérico , tem-se:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 4. |

Os pontos citados nesta equação são pontos coincidentes com os pontos fonte, um procedimento usual do MEC. Entretanto, os pontos de interpolação ou pontos base também são coincidentes com os pontos nodais na aproximação da integral de domínio. Assim, os pontos base devem ser diferenciados dos pontos fonte em vista de evitar singularidades.

Assim, o procedimento para a avaliação numérica das integrais previamente apresentadas em 4.13, bem simples e bem-conhecido, é demonstrado abaixo:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Desta forma, ao agrupar este procedimento, obtém-se a seguinte equação matricial:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 4. |

Onde, nesta equação matricial 4.15, será considerado . O procedimento detalhado para a determinação do valor do termo será determinado a seguir. Para tal, considera-se uma matriz relacionada à solução fundamental. Esta relação é determinada por:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Assim,

|  |  |
| --- | --- |
|  | 4. |

Para esta equação, elementos de contorno lineares com nós posicionados nos fins são utilizados. Portando, os valores de são definidos como inicialmente posicionados ao centro do elemento e então interpolados para as extremidades para evitar singularidades.

A forma previamente abordada por 4.15 é particularmente útil para a resolução de problemas de Poisson, entretanto, para problemas de Helmholtz, os valores nodais que se referem ao potencial incluídos em devem ser explicitados. Com o seguinte procedimento, a matriz que é equivalente à matriz de massa de problemas dinâmicos escalares, tal como problemas acústicos, também será explicitada. Para tal matriz, cada termo do vetor deve ser analisada separadamente. Assim, primeiramente, é definido para que cada número de pontos fonte :

|  |  |
| --- | --- |
|  | 4. |

Portanto, considerando a equação 4.17, a equação 4.18 pode ser reescrita como:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 4. |

Na qual, a matriz é uma matriz de interpolação que transfere os valores obtidos nos pontos para as coordenadas dos pontos fontes . Isto posto, para se construir a matriz de massa do sistema, sabe-se que a matriz linha e a inversa da matriz de interpolação não são alteradas para cada ponto fonte e podem ser transformadas no vetor linha , e portanto, simplificando o produto matricial desenvolvido na equação 4.19:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 4. |

Assim, a equação matricial em sua forma completa se torna:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 4. |

Esta equação 4.21 necessita ser adequadamente resolvida, por que envolve simultaneamente valores potenciais e valores para suas derivativas, como na equação 4.15. Portanto, novas submatrizes com valores nodais prescritos para e devem ser utilizados:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Levando em consideração, que os valores prescritos para e são nulos.

## A FORMULAÇÃO MECID AUTORREGULARIZADA APLICADA À PROBLEMAS DE HELMHOLTZ

A formulação do MECID autorregularizado para se resolver problemas governados pela Equação de Helmholtz se inicia com o estabelecimento de uma equação integral no qual uma função auxiliar é utilizada:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 4. |

Onde, para simplificação, define-se:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Esta função auxiliar proposta na equação 4.23 é composta pela solução fundamental de um problema relacionado aos problemas governados pela Equação de Laplace, e é o Tensor de Galerkin, com seus respectivos valores definidos abaixo:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Assim, partindo da Equação de Helmholtz em sua forma indicial como exemplificada abaixo:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 4. |

Aplica-se a função auxiliar aos dois lados da equação, e integralizando a equação 4.27 obtemos:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 4. |

Assim, ao substituir os valores da função auxiliar, pode-se expandir a equação 4.28 para desenvolver os termos conhecidos:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 4. |

Assim, para dar seguimento neste procedimento, se faz necessário deduzir a Forma Integral Inversa da integral de contorno. Para tal, faremos a integração por partes e a aplicação do Teorema da Divergência de Gauss (Stewart, 2001), como previamente desenvolvido no capítulo 3. Assim, ao integrar o lado esquerdo da equação 4.29 por partes, resultaremos em:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 4. |

Como o quarto termo do lado esquerdo da equação 4.30 ainda continua sendo uma integral de domínio, pode-se trabalhá-lo através da aplicação da integração por partes, de forma que integrando a primeira vez, tem-se:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Integrando a mesma por partes uma segunda vez:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Aplica-se o Teorema da Divergência para levar o primeiro e o segundo termo após a igualdade para o contorno, conforme:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 4. |

Por fim, pode-se fazer uma última modificação, considerando que a derivada segunda do tensor de Galerkin é igual a solução fundamental , tem-se que:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Logo, a equação 4.33 se torna:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 4. |

Ao substituir a equação 4.35 na equação 4.30, temos por fim:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 4. |

Onde duas novas funções foram introduzidas. Seus respectivos valores são:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 4. |

e

|  |  |
| --- | --- |
|  | 4. |

Assim, com a expansão da equação 4.36, combinada com uma inversão de sinais em toda a equação, obtemos:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 4. |

onde podemos anular o último termo do lado esquerdo da equação com o primeiro termo do lado direito e substituir as 4.37 e 4.38 em 4.39, obtendo assim, a seguinte equação final:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 4. |

Onde, pode-se observar que todo o lado esquerdo da equação está sendo integrado ao longo do contorno e, portanto, obedecendo a metodologia de solução do MEC. Assim, resta somente a conversão da expressão do lado esquerdo da equação 4.40 para uma integral de contorno. Para tal, o lado direito da equação pode ser resolvido por uma aproximação de seu núcleo, de forma que:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 4. |

Para dar continuidade no desenvolvimento da equação 4.41, é utilizada estratégia semelhante ao desenvolvimento do MECID regularizado após a equação 4.6, onde se admite uma função de base radial que possui uma função primitiva associada, definida como . Entretanto, neste desenvolvimento, a futura integral do lado esquerdo da equação 4.41 é formada pelo tensor de Galerkin, e não pela solução fundamental , como desenvolvida na equação 4.6. Assim, desenvolvendo esta mesma estratégia de forma simplificada, o lado esquerdo da equação 4.41 se desenvolve da seguinte forma:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Assim, é aplicado o Teorema da Divergência ao lado direito da equação, transformando a integral de domínio em uma integral de contorno:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Simplificando a equação, define-se:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Portanto:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Como é conhecido, pode ser facilmente calculado. Assim, de acordo com (Galimberti, 2018), sabe-se que:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Desenvolvendo a equação matricial analogamente ao desenvolvimento de 4.17:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 4. |

Logo:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 4. |

Portanto, considerando a equação 4.47, a equação 4.48 pode ser reescrita como:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Desta forma, a equação para definição da matriz de massa é feita em 4.50 da mesma forma que em 4.20:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 4. |

Assim, a equação matricial final se torna:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Por fim, reescreve-se essa mesma equação matricial em função novas submatrizes com valores nodais prescritos para e :

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

# FORMULAÇÃO PROPOSTA

## INTRODUÇÃO

Fisicamente, pode-se definir um problema de autovalor como um problema onde se buscam configurações auto equilibradas na condição de vibração livre, ou seja, os valores das Condições de Contorno de Neumann são nulos. Essas condições especificam os valores que a derivada de uma solução deve tomar no contorno do domínio.

Para um problema elástico, as forças inerciais e forças elásticas se equilibram sem a interferência de esforços externos. Similarmente, este conceito pode ser aplicado aos problemas de Helmholtz, que também englobam problemas mais simples da elasticidade como casos de torção, deflexão de membranas e vibração de barras.

## EQUACIONAMENTO DO MÉTODO

Inicialmente, é interessante escrever o sistema do MEC usando submatrizes, nas quais os valores prescritos de e sejam claramente identificados, conforme mostrado na equação a seguir:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 5. |

Assim, como para um problema de autovalor, os valores de e são nulos, a equação matricial 5.1 se torna:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 5. |

Distribuindo os valores da equação 5.2, geramos duas equações acopladas, tal que:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 5. |

|  |  |
| --- | --- |
|  | 5. |

Assim, de acordo com (Loeffler & Mansur, Vibrações Livres de Barras e Membranas Através do Método dos Elementos de Contorno, 1986), partindo da equação 5.3, o termo é isolado, na forma mostrada à seguir:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 5. |

Assim, nesta equação 5.5 encontra-se uma dificuldade. Ao isolar o termo , é obtida a inversão da soma de duas matrizes , onde está multiplicado pelo escalar , assim dificultando o procedimento. Dessa forma, esse termo terá que ser explicitado de uma forma aproximada do seu valor.

Para tal, embora não seja usual, existem soluções propostas para resolução da inversa da soma de duas matrizes. Uma delas é a extensão da Identidade de Hua da álgebra polinomial, que é demonstrada em (Cohn, 1991). Sua adaptação para a álgebra matricial é apresentada em (Schott, 2016), e será demonstrada neste capítulo. Assim, inicia-se tal demonstração introduzindo a Identidade de Hua na equação 5.6:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 5. |

Percebe-se na equação 5.6, que a Identidade de Hua ainda mantém o cálculo da inversa da soma de duas matrizes, porém, a sua utilização nas literaturas se dá visando um melhor condicionamento das operações matriciais. Neste trabalho, particularmente, a Identidade de Hua será utilizada visando o melhor controle do escalar que a adoção dela proporciona.

Assim, a Identidade de Hua pode ser simplificada através da operacionalização do segundo termo do lado direito. Para tal, utiliza-se da propriedade que estabelece que a inversa do produto de duas matrizes é definida produto das inversas, mas na ordem inversa, assim:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Assim, aplicando esta propriedade na equação 5.6:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Considerando então, que e , visualiza-se melhor o coeficiente :

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Chamando então, o seguinte termo da expressão acima de :

|  |  |
| --- | --- |
|  | 5. |

Tem-se a seguinte equação:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 5. |

Da mesma forma para a propriedade abordada, pode se fazer e , assim, aplicando os mesmos diretamente na Identidade de Hua:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 5. |

Onde, podemos simplificar os termos do lado direito da equação:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

De modo similar à 5.10, pode-se chamar:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 5. |

Portanto, a equação 5.12 se torna:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 5. |

Vale a pena ressaltar que para a equação 5.15, o termo exibido na equação 5.16 se tornara efetivamente pouco importante, devido a hipótese que para altas frequências, o produto da matriz pelo coeficiente tende à zero, e que baixíssimas frequências não serão abordadas por este modelo. Portanto:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 5. |

A consideração da equação 5.16 não é possível de ser feita para o primeiro caso mostrado, onde e , pelo menos dentro de uma expectativa física de resposta. Além disso, sem a consideração feita em 5.16, uma diferença muito mais importante entre as equações 5.11 e 5.15 aparece, que pode ser identificada somente após a montagem completa do sistema matricial: a ordem das potências que envolvem o coeficiente λ.

Seguindo esta última estrutura, a equação característica teria ordem 4, uma estrutura mais coerente com o problema que se quer resolver, enquanto na estrutura anterior teria apenas ordem 3.

A hipótese adotada pode ser comprovada através de outra modelagem para a inversa da soma de matrizes. É inspirada nas seguintes expressões binomiais:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 5. |

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Considerando o caso da equação 5.17, em que , para os primeiros dois termos da série:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Assim:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 5. |

Substituindo então, e na equação 5.20:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Assim, pode-se substituir o valor do segundo termo do lado direito pelo termo previamente definido na equação 5.14, obtendo:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 5. |

Percebe-se que a expressão 5.22 é idêntica à equação obtida previamente 5.15, demonstrando que a hipótese assumida por este trabalho ao desprezar a matriz na equação 5.16 é coerente com a expansão em dois termos da série apresentada.

Assim, após definida a inversa da soma das matrizes, podemos dar seguimento ao procedimento. Para fins de facilitar o entendimento, é repetida a equação 5.5:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 5. |

Define-se uma nova expressão para facilitar os cálculos, e, portanto:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 5. |

De forma que, substituindo as equações 5.22 e 5.24 na equação 5.23:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 5. |

E substituindo o novo valor de encontrado na equação 5.25 na equação 5.4:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Que, fazendo a distribuição dos termos, chega-se à seguinte equação:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Para simplificação da equação, define-se os seguintes termos:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

|  |  |
| --- | --- |
|  | 5. |

Assim, substituindo o valor de definido em 5.24 na equação 5.29, obtém-se:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Após a distribuição dos termos em parênteses:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 5. |

Organiza-se toda a equação 5.31:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 5. |

Por fim, toda a equação 5.32 é multiplicada por e os termos afins são reorganizados e isolados:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Assim, fazendo as seguintes substituições:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Com a definição dessas novas matrizes de apoio, resume-se o sistema completo na seguinte forma:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 5. |

Resultando, por fim, na equação 5.38, que possui a forma de uma equação característica:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 5. |

## PROPOSIÇÃO DE PRZEMINIECKY

Para dar início a resolução da equação característica 5.38, uma das alternativas é buscar uma solução com estrutura próxima à equação, onde seus conceitos poderiam ser

Assim, de partindo da proposição de (Przemieniecki, 1985), no capítulo 12.4 de seu livro, enquadramos o sistema a seguir como um problema de autovalor quadrático:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 5. |

De como demonstrado no desenvolvimento matemático dos artigos de (Chu, Hwang, & Lin, 2005) e (Hwang, Lin, & Mehrmann, 2003), sistemas matriciais desta ordem aparecem na solução de problemas de análise estrutural e na simulação acústica de materiais poro-elásticos.

Para este sistema, (Przemieniecki, 1985) afirma que sua a solução possui a seguinte forma:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 5. |

Onde, no sistema proposto, representa o vetor de deslocamentos ou uma grandeza primária qualquer, dado pelo produto de uma amplitude e uma função de tempo, expressa em termos do parâmetro . A proposta de solução é a mesma encontrada em (Stewart, 2001) para resolver uma equação diferencial, transformando-a numa equação algébrica. Aqui, intenta-se eliminar as derivadas temporais da equação matricial. Portanto, ao substituir a equação 5.40 em 5.39, e aplicar as derivadas em relação ao tempo:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 5. |

Esta equação possui soluções não-triviais desde que o determinante dos termos internos aos parênteses seja nulo, evitando assim, a pré-multiplicação por uma inversa do sistema matricial em questão:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 5. |

Para sistemas com diversos graus de liberdade, a formulação das equações 5.41 e 5.42 se torna inconveniente. Assim, utilizando um método que foi proposto inicialmente por (Duncan, 1956.), pode-se reduzir essas equações a uma forma padrão. Contudo, é preciso voltar à equação de equilíbrio dinâmico 5.39, e reescrevê-la adequadamente.

Desta forma, a equação 5.39 é combinada com a identidade dada pela equação 5.43 à seguir, gerando assim uma equação matricial de maior ordem, porém formatada tal como um problema de autovalor padrão.

|  |  |
| --- | --- |
|  | 5. |

|  |  |
| --- | --- |
|  | 5. |

Assim, pode-se reescrever as expressões 5.43 e 5.44 como uma equação matricial, definida pela equação seguinte:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 5. |

Para melhor reescrever a equação 5.45, define-se:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Desta forma, a equação 5.45 é reescrita como:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

A relação entre as acelerações e velocidades e entre as velocidades e o deslocamento é dada por ; então, pode-se escrever o problema em questão na forma padrão de um problema de autovalor:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

E, portanto:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Sendo essa última forma muito mais simples de se resolver através de um algoritmo computacional disponível na literatura. Detalhes adicionais sobre a linearização e resolução deste problema podem ser obtidos em (Afolabi, 1987).

## ANALOGIA DA PROPOSIÇÃO DE PRZEMINIECKY

Partindo da equação 5.38, percebe-se que a mesma possui ordem bem maior que a equação apresentada por Przeminiecky em 5.39, porém devido às similaridades, o modelo proposto pode ser aproveitado e adaptado. Nesse sentido, analogamente, pode-se escrever as seguintes identidades envolvendo sistemas de equações matriciais:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 5. |

Para fazer as substituições definidas em 5.50, reescreve-se a equação 5.38, como equação 5.51:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 5. |

Esta equação pode ser reescrita, caso seja considerado a partir de 5.40:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

A proposição acima pode ser considerada para as próximas derivadas em relação ao tempo de . Desta forma, a equação 5.51 se torna:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 5. |

Assim, combinando as identidades propostas em 5.50 com a equação 5.53, e reorganizando tal equação:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 5. |

Desta forma, pode-se formar um sistema de equações considerando 5.54 e 5.50, tal que:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Pode-se organizar tal sistema em uma equação matricial contendo duas únicas matrizes:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 5. |

Por conveniência, define-se as matrizes apresentadas anteriormente como:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Portanto, a equação matricial 5.56 se torna:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 5. |

Da mesma forma, como demonstrado anteriormente em 5.40, pode-se reescrever 5.58:

|  |  |
| --- | --- |
|  | 5. |

Assim, considerando a matriz coluna apresentada anteriormente como :

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Assim, a expressão 5.59 se torna:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Que pode ser reescrita como:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

Ressalta-se que neste caso, diferentemente do que usualmente se encontra nas análises vibracionais em estruturas, são autovalores que podem estar relacionados às frequencias naturais. Isto é mais bem examinado no item seguinte.

# SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS

Para o presente trabalho, apenas dois exemplos simples serão simulados, pois se sabe que o modelo apresenta aproximações importantes no modelo matemático e fortes limitações no processamento computacional.

Neste trabalho usam-se elementos de contorno isoparamétricos lineares, de igual tamanho, e a interpolação feita pela MECID usa funções radiais simples e de placa fina, que tiverem desempenho já consolidado em muitas aplicações anteriores (Barcelos, Comparação de desempenho entre a formulação direta do Método dos Elementos de Contorno com Funções Radiais e o Método dos Elementos Finitos em problemas de Poisson e Helmholtz, 2014), (Frossard, 2016).

## BARRA ENGASTADA

A primeira simulação desenvolvida consiste em uma chapa quadrada de dimensões unitárias, engastada apenas em uma extremidade, como mostrado na figura:

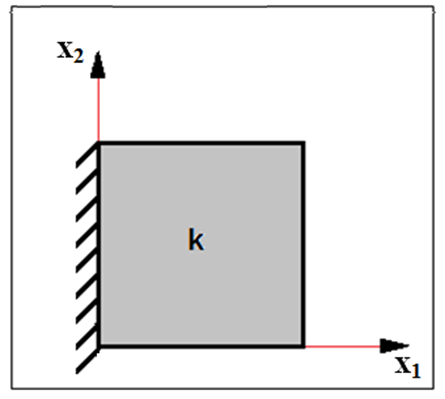


Figura - Barra engastada em uma extremidade e livre nas outras extremidades.

As propriedades físicas e os lados da chapa foram considerados unitários para simplificar os cálculos a serem desenvolvidos. Os autovalores são calculados e comparados com as frequências naturais na barra, que são calculadas analiticamente pela fórmula:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

As frequências naturais incluem os valores relacionados à vibração transversa.

Primeiramente são mostrados os resultados obtidos com a função radial simples. Diversas malhas foram usadas; mas, devido às limitações da programação computacional, nenhuma malha acima de 500 graus de liberdade pode ser resolvida. Como o sistema é quatro vezes maior do que o sistema matricial clássico do MEC para cálculo de autovalor, há uma dimensão declarada no programa de 2000 espaços, que para ser superada precisaria de uma reprogramação otimizada.

Em razão da relação apresentada na equação dddd, Os resultados dos autovalores calculados pelo programa estão associados ao quadrado das frequências naturais.

Na tabela I mostram-se os resultados reais positivos para os autovalores. Na convenção aqui utilizada, tem-se número de nós de contorno/número de pontos interpolantes (NC/NI).

Tabela - Resultados da Interpolação da Função Radial Simples

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| QUANTIDADE DE NÓS DE CONTORNO/QUANTIDADE DE PONTOS INTERPOLANTES | | | | |
| 84/144 | 164/144 | 164/225 | 164/324 | AO QUAD |
| 0.9795 | 0.99356 | 0.9935 | 0.99357 | 2.4699 |
| 12.486 | 12.187 | 12.175 | 12.164 | 12.3594 |
| 15.331 | 14.383 | 14.53 | 14.658 | 22.2539 |
| 17.0923 | 17.55 | 17.243 | 17.024 | 32.1841 |
| 28.899 | 27.631 | 27.463 | 27.336 | 42.0889 |
| 39.4176 | 39.332 | 38.8032 | 38.4324 | 61.9431 |
| 54.9182 | 61.145 | 60.6144 | 60.2448 | 61. 9431 |
| 58.7938 | 91.745 | 91.9206 | 91.965 | 71.9545 |
| 61.6538 | 93.696 | 93.047 | 92.5635 | 91.8396 |
| 91.9687 | 99.658 | 99.023 | 98.5179 | 102.0302 |
| 93.7016 | 107.737 | 107.046 | 106.453 | 111.9787 |
| 100.468 | 114.492 | 114.061 | 113.737 | 121.7712 |

Devido a aproximação feita para o cálculo da inversa da soma das matrizes, a determinação da primeira frequência foi grandemente prejudicada. Outras mais baixas também estão bem longe da precisão devida e necessitariam de malhas mais refinadas para uma melhor qualidade dos autovalores. Certas frequências mais altas, contudo, foram mais bem descritas, como a segunda, a quinta e a nona, que são axiais.

Comumente os modelos numéricos discretos não conseguem representar adequadamente alguns modos de vibração, especialmente os modos mais altos, que consomem mais energia e demandam uma representação espacial mais elaborada. No entanto, usando o MECID e, consequentemente, funções de base radial, a disposição dos pontos de interpolação interna em cada malha altera os resultados e não pode ser apropriada para descrever com precisão certos modos, que não são necessariamente os modos mais altos. Assim, devido a esse comportamento do MECID, sempre são esperadas algumas oscilações na curva de diferença relativa quando a posição dos pontos de interpolação é alterada.

Apesar das imprecisões nos resultados, observa-se uma convergência nos resultados numéricos. Os resultados com melhor qualidade não puderam ser obtidos devido às aproximações no modelo matemático. Tal convergência não havia sido obtida em outros modelos testados.

Na Tabela 2 a seguir são apresentados os resultados para o mesmo problema usando a função radial de placa fina.

Pode-se notar uma certa dispersão na sequência de frequências calculadas, no sentido de que a medida que se efetuou o refinamento, alguns autovalores mais altos desceram da escala de ordenamento e se introduziram mais abaixo, e vice versa. A malha mais refinada (164/324) mostra claramente esse efeito, se comparada à malha com (164/225).

Tabela - Resultados da Interpolação da Função Log de Engaste

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | | | | |
| 84/144 | 84/225 | 164/144 | 164/225 | 164/324 | ω2 |
| 0.9795 | 0.97958 | 0.99357 | 0.99357 | 0.99356 | 2.4699 |
| 12.3396 | 12.3416 | 12.089 | 12.0893 | 12.0866 | 12.3594 |
| 16.8735 | 17.1068 | 15.596 | 15.8912 | 25.5561 | 22.2539 |
| 33.4516 | 34.0601 | 17.37 | 16.8832 | 36.3417 | 32.1841 |
| 42.5878 | 45.1677 | 25.634 | 25.6059 | 57.9543 | 42.0889 |
| 51.0394 | 49.7525 | 37.048 | 36.6269 | 91.9149 | 61.9431 |
| 59.815 | 59.4087 | 58.3916 | 58.1349 | 102.4377 | 61. 9431 |
| 74.6862 | 76.9945 | 91.9151 | 91.9295 | 108.66 | 71.9545 |
| 88.0378 | 86.8812 | 103.246 | 102.769 | 126.098 | 91.8396 |
| 92.1106 | 92.1179 | 108.589 | 108.65 | 159.8708 | 102.0302 |
| 102.746 | 102.425 | 126.443 | 126.198 | 168.8214 | 111.9787 |
| 107.9749 | 108.034 | 159.37 | 159.763 | 182.5951 | 121.7712 |

## MEMBRANA QUADRADA

Para testar o método anteriormente apresentado será introduzido o problema de vibração em membrana quadrada, que também possui solução analítica. Tais resultados serão comparados com o retornado pelo MECID. A figura ... mostra as características físicas e geométricas do problema, que possui dimensões e propriedades unitárias também unitárias por conveniência.

Os valores analíticos são para frequências naturais apresentados (Meirovitch, 1967) e definidos conforme a seguinte expressão:

|  |  |
| --- | --- |
|  | . |

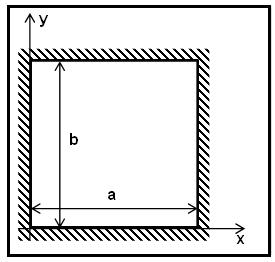


Figura - Membrana retangular totalmente fixada. Fonte: Autoria própria.

Este exemplo tem um comportamento numérico algo distinto do anterior. Os graus de liberdade, fundamentais na análise dinâmica, são dados exclusivamente pelos pontos internos interpolantes, enquanto no caso anterior apenas um quarto dos pontos nodais havia sido eliminado do sistema matricial. Assim, este problema é numericamente bem mais difícil de modelar qualitativamente do que o caso previamente estudado.

O fato de que os graus interpolantes do contorno também são eliminados faz com que a quantidade de pontos internos interpolantes cresça em importância no modelo discreto.

Os resultados obtidos refletem essa maior dificuldade numérica; os autovalores agora calculados estão bem menos precisos do que os calculados anteriormente. Apenas a função radial simples foi empregada na interpolação.

Tabela - Resultados da Interpolação da Função Radial Simples

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | | | | |
| 84/144 | 84/225 | 164/144 | 164/225 | 164/324 | ω2 |
| 8.61064 | 8.5451 | 8.5914 | 8.5451 | 8.51465 | 19.7391 |
| 18.16 | 17.871 | 18.13464 | 17.871 | 17.6999 | 49.3478 |
| 18.2828 | 17.8873 | 18.14557 | 17.8873 | 17.72035 | 49.3478 |
| 45.0311 | 44.0385 | 44.66674 | 44.038 | 43.63456 | 78.9556 |
| 59.6519 | 58.9881 | 59.53348 | 58.988 | 58.63164 | 98.6943 |
| 61.8291 | 61.1692 | 61.95456 | 61.169 | 60.63612 | 98.6943 |
| 82.6897 | 81.4169 | 82.4125 | 81.4169 | 80.77194 | 128.3032 |
| 83.7839 | 81.5618 | 82.511 | 81.5618 | 80.95417 | 128.3032 |
| 106.4193 | 105.4033 | 106.6581 | 105.4033 | 104.5291 | 167.9406 |
| 106.5278 | 105.4156 | 106.6665 | 105.4133 | 104.5446 | 167.9406 |
| 135.0431 | 131.9681 | 133.5834 | 131.968 | 130.9164 | 177.6515 |
| 138.156 | 135.2091 | 136.7063 | 135.2091 | 134.2057 | 197.3912 |

# CONCLUSÕES

Uma vez que a os resultados da formulação autorregularizada do Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta são melhores que os resultados da formulação regularizada em problemas de diretos governados pela Equação de Helmholtz, procurou-se analisar a possibilidade e aplicá-la em problemas de autovalor e futuramente em problemas de resposta, usando a Equação da Onda.

Nesse sentido, examinaram-se os procedimentos matemáticos capazes de conduzir o modelo autorregularizado do MECID a uma forma pertinente a um problema de autovalor.

Contudo, embora haja modelos similares para o problema dito quadrático, o caso em questão é muito mais complicado, pois é de quarta ordem e arrola uma estrutura em que cada matriz constitutiva do sistema está multiplicada pelo coeficiente associado ao autovalor.

Para que se chegar ao intento desejado, uma aproximação foi feita no cálculo das derivadas do potencial, que são eliminadas no modelo de um problema de autovalor. Tal aproximação, além de outros problemas numéricos que não puderam ser mais bem estudados, fizeram com que os resultados numéricos alcançados ficassem aquém do desejado.

Resta, todavia, ressaltar que objetivo foi alcançado pois um procedimento matemático consistente foi aplicado e que não se pode identificar trabalhos similares na literatura.

Assim, o uso da formulação autorregularizada do Método dos Elementos de Contorno deve ser aplicada apenas na obtenção do espectro de frequências via resposta direta, pois que seus resultados nessa classe foram bastante precisos, o que não se pode reproduzir no caso do cálculo dos autovalores associados.

# REFERÊNCIAS

Afolabi, D. (1987). Linearization of the quadratic eigenvalue problem. *Computers & Structures, 26*(6), 1039-1040.

Barcelos, H. M. (2014). Comparação de desempenho entre a formulação direta do Método dos Elementos de Contorno com Funções Radiais e o Método dos Elementos Finitos em problemas de Poisson e Helmholtz. Vitória: Universidade Federal do Espírito Santo.

Brebbia, C. A. (1978). *The Boundary Element method for Engineers.* London: Pentech Press.

Brebbia, C. A., & Ferrante, A. J. (1975). *The Finite Element Technique.* Porto Alegre: URGS.

Butkov, E. (1988). *Física matemática.* Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos.

Chu, M. T., Hwang, T.-M., & Lin, W.-W. (2005). A novel deflation technique for solving quadratic eigenvalue problems.

Cohn, P. M. (1991). *Further Algebra and Applications.* Springer.

Courant, R., & John, F. (1974). *Introduction to Calculus & Analysis.* John Wiley & Sons.

Frossard, A. L. (2016). Avaliação Do Desempenho De Técnicas Para Melhoria Da Formulação MECID Em Problemas De Autovalor. Vitória, ES, Brasil: Universidade Federal do Espírito Santo.

Galimberti, R. (2018). Formulação do método dos elementos de contorno para resolver problemas de Helmholtz usando funções de interpolação de base radial sem regularização. Vitória.

Gaul, L. K. (2012). *Boundary Element Methods for Engineers and Scientists: An Introductory Course with Advanced Topics.* Springer Berlin Heidelberg.

Hwang, T.-M., Lin, W.-W., & Mehrmann, V. (2003). Numerical solution of quadratic eigenvalue problems with structure-preserving methods. *SIAM Journal on Scientific Computing, 24*(4), 1283-1302.

Loeffler, C. F. (1988). Uma formulação alternativa do método dos elementos de contorno aplicada a problemas de campo escalar. Rio de Janeiro(RJ).

Loeffler, C. F., & Mansur, W. J. (1986). Vibrações Livres de Barras e Membranas Através do Método dos Elementos de Contorno. *Revista Brasileira de Engenharia (RBE), 4*(2), 5-23.

Loeffler, C. F., & Mansur, W. J. (2017). A Regularization Scheme Applied to the Direct Interpolation Boundary Element Technique with Radial Basis Functions for Solving Eigenvalue Problem. *Engineering Analysis with Boundary Elements, 74*, 14-18.

Loeffler, C. F., Barcelos, H. M., & Mansur, W. J. (2015). Solving Helmholtz Problems with the Boundary Element Method Using Direct Radial Basis Function Interpolation. *Engineering Analysis with Boundary Elements, 61*, 218-225.

Loeffler, C. F., Cruz, A., & Bulcão, A. (2015). Direct Use of Radial Basis Interpolation Functions for Modelling Source Terms with the Boundary Element Method. *Engineering Analysis with Boundary Elements, 50*, 97-108.

Loeffler, C. F., Galimberti, R., & Barcelos, H. M. (2018). *A self-regularized scheme for solving Helmholtz problems using the boundary element direct integration technique with radial basis functions.*

Loeffler, C. F., Pereira, P. V., Lara, L., & Mansur, W. J. (2017). Comparison between the Formulation of the Boundary Element Method that uses Fundamental Solution Dependent of Frequency and the Direct Radial Basis Boundary Element Formulation for Solution of Helmholtz Problems. *Eng. Analysis Boundary Elements, 79*, 81-87.

Loeffler, C. F., Zamprogno, L., Mansur, W. J., & Bulcão, A. (2017). Performance of Compact Radial Basis Functions in the Direct Interpolation Boundary Element Method for Solving Potential Problems. *Computational Methods and Engineering and Sciences, 113*(3), 387-412.

Meirovitch, L. (1967). *Analytical methods in vibrations.* Macmillan.

Moon, P. S. (1971). *Field Theory for Engineers.* New Jersey: Springer.

Partridge, P., Brebbia, C., & Wrobel, L. (1992). The Dual Reciprocity, Boundary Element method. *Computational Mechanics Publications and Elsevier*.

Przemieniecki, J. S. (1985). *Theory of matrix structural analysis.* Courier Corporation.

Schott, J. (2016). *Matrix Analysis for Statistics* (Vol. 3). John Wiley & Sons.

Stewart, J. (2001). *Cálculo* (Vol. 2). São Paulo: Pioneira.

# 

# APÊNDICES

Aquele que ama ou exerce ou deseja a dor, pode ocasionalmente adquirir algum prazer na labuta. Para dar um exemplo trivial, qual de nós se submete a laborioso exercício físico, exceto para obter alguma vantagem com isso. Desmoralizado pelos encantos do prazer, percebe que a dor não resulta em prazer algum. Está tão cego pelo desejo que não pode prever quem não cumprirá seu dever por fraqueza de vontade.

Aquele que ama ou exerce ou deseja a dor, pode ocasionalmente adquirir algum prazer na labuta. Para dar um exemplo trivial, qual de nós se submete a laborioso exercício físico, exceto para obter alguma vantagem com isso. Desmoralizado pelos encantos do prazer, percebe que a dor não resulta em prazer algum. Está tão cego pelo desejo que não pode prever quem não cumprirá seu dever por fraqueza de vontade.

Aquele que ama ou exerce ou deseja a dor, pode ocasionalmente adquirir algum prazer na labuta. Para dar um exemplo trivial, qual de nós se submete a laborioso exercício físico, exceto para obter alguma vantagem com isso. Desmoralizado pelos encantos do prazer, percebe que a dor não resulta em prazer algum. Está tão cego pelo desejo que não pode prever quem não cumprirá seu dever por fraqueza de vontade.

Aquele que ama ou exerce ou deseja a dor, pode ocasionalmente adquirir algum prazer na labuta. Para dar um exemplo trivial, qual de nós se submete a laborioso exercício físico, exceto para obter alguma vantagem com isso. Desmoralizado pelos encantos do prazer, percebe que a dor não resulta em prazer algum. Está tão cego pelo desejo que não pode prever quem não cumprirá seu dever por fraqueza de vontade.

Aquele que ama ou exerce ou deseja a dor, pode ocasionalmente adquirir algum prazer na labuta. Para dar um exemplo trivial, qual de nós se submete a laborioso exercício físico, exceto para obter alguma vantagem com isso. Desmoralizado pelos encantos do prazer, percebe que a dor não resulta em prazer algum. Está tão cego pelo desejo que não pode prever quem não cumprirá seu dever por fraqueza de vontade.